

完全正則空間・一様構造・距離化：自己完結的・網羅的詳説

【詳細目次】

- 分離公理：正規性と完全正則性の定義
- ウリゾーンの補題：正規空間における関数の存在証明（詳細）
- 局所コンパクト空間の完全正則性（一点コンパクト化を經由して）
- 一様構造の厳密な定式化と擬距離による再構成
- 微細一様構造の構成と連続関数の一様連続性
- 完備性の理論：コーシーフィルターと収束の議論
- コンパクト空間における一様構造の一意性と完備性の完全証明
- 距離化可能定理：可算基底から距離を構成する全行程
- ウリゾーンの距離化定理：正規性と第二可算性の結実

1. 分離公理：正規性と完全正則性の定義

位相空間 (X, τ) の分離公理は、空間内の「対象（点や集合）」をどれだけ解析的な道具（開集合や連続関数）で区別できるかを規定する。以下ではすべての空間は T_1 であると仮定する。

定義 1.1 (正規空間) X が正規 (Normal, T_4) であるとは、互いに素な任意の閉集合 $A, B \subseteq X$ に対して、ある開集合 $U, V \subseteq X$ が存在して、

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たすことをいう。

定義 1.2 (完全正則空間) X が完全正則 (Completely Regular, $T_{3\frac{1}{2}}$) であるとは、任意の閉集合 $F \subseteq X$ と点 $x \in X \setminus F$ に対して、連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して、

$$f(x) = 0 \quad \text{かつ} \quad f(F) = \{1\}$$

を満たすことをいう。

2. ウリゾーンの補題：正規空間における関数の存在証明

正規性の概念は「開集合による分離」であるが、これは「連続関数による分離」と等価である。これを示すのがウリゾーンの補題である。この証明は、可算個の開集合の鎖を稠密に埋め込むという独創的な手法をとる。

補題 2.1 (URYSOHN'S LEMMA) 正規空間 X において、互いに素な閉集合 $A, B \subseteq X$ に対し、連続関数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して $f(A) = \{0\}$ かつ $f(B) = \{1\}$ を満たす。

証明

$[0, 1]$ 内の二進有理数の集合 $D = \{k/2^n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\}$ を考える。 D は $[0, 1]$ で稠密である。

ステップ 1：開集合族 $\{U_r\}_{r \in D}$ の構成

$r \in D$ に対し、開集合 U_r を「 $r < s \implies \overline{U_r} \subseteq U_s$ 」となるように数学的帰納法で構成する。1. まず $U_1 = X \setminus B$ とおく。 $A \cap B = \emptyset$ より $A \subseteq U_1$ である。2. 正規性により、閉集合 A と開集合 U_1 に対し、 $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$ を満たす開集合 U_0 が存在する。3. 次に $r = 1/2$ に対し、 $\overline{U_0} \subseteq U_1$ であるから、正規性より $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$ となる $U_{1/2}$ が存在する。4. 以下、分母が 2^n の二進有理数に対して順次 U_r を決定していく。既に分母が 2^{n-1} 以下のすべての r に対して U_r が定義さ

れており、条件を満たしているとする。 $r = (2k+1)/2^n$ に対し、 $s = 2k/2^n$ と $t = (2k+2)/2^n$ は分母が 2^{n-1} 以下であり、 $\overline{U_s} \subseteq U_t$ を満たしている。正規性により $\overline{U_s} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_t$ を満たす U_r をとる。これにより、すべての $r \in D$ に対して U_r が定まる。

ステップ2：関数の定義

$f: X \rightarrow [0, 1]$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in D \mid x \in U_r\} & (x \in U_1) \\ 1 & (x \notin U_1) \end{cases}$$

明らかに、 $x \in A$ ならば $x \in U_0$ なので $f(x) = 0$ である。また $x \in B$ ならば $x \notin U_1$ なので $f(x) = 1$ である。

ステップ3：連続性の証明

f の連続性を示すには、 $f^{-1}([0, a))$ と $f^{-1}((b, 1])$ がすべての $a, b \in (0, 1)$ に対して開集合であることを示せばよい。1. $x \in f^{-1}([0, a)) \iff f(x) < a \iff \exists r \in D, r < a, x \in U_r$ 。したがって $f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{r < a} U_r$ である。これは開集合の和集合なので開集合である。2.

$x \in f^{-1}((b, 1]) \iff f(x) > b$ 。ここで、 $f(x) > b \iff \exists s \in D, s > b, x \notin \overline{U_s}$ を示す。(i) ある $s > b$ で $x \notin \overline{U_s}$ ならば、任意の $r \in D$ で $r \leq s$ ならば $x \notin U_r$ 。よって $\inf\{r \mid x \in U_r\} \geq s > b$ 。(ii) 逆に $f(x) > b$ ならば、稠密性より $b < s < s' < f(x)$ なる $s, s' \in D$ がとれる。 $f(x) > s'$ より $x \notin U_{s'}$ 。 $\overline{U_s} \subseteq U_{s'}$ なので $x \notin \overline{U_s}$ 。ゆえに $f^{-1}((b, 1]) = \bigcup_{s > b} (X \setminus \overline{U_s})$ である。これは閉集合の補集合の和集合なので開集合である。以上より f は連続である。 ■

3. 局所コンパクト空間の完全正則性

局所コンパクト Hausdorff 空間は必ず完全正則になる。これは一点コンパクト化を用いた簡潔な証明が可能である。

定理 3.1 局所コンパクト Hausdorff 空間 X は完全正則である。

証明

1. X に無限遠点 ∞ を加えた集合 $X^* = X \cup \{\infty\}$ に一点コンパクト化の位相を導入する。2. X が局所コンパクト Hausdorff であれば、 X^* はコンパクト Hausdorff 空間になる。3. **事実：コンパクト Hausdorff 空間は正規である。** (証明の概略： Hausdorff 性により点と点を分離でき、コンパクト性により点と閉集合の分離、閉集合と閉集合の分離へと有限被覆の議論で持ち上げられる。) 4. ウリゾーンの補題より、 X^* は正規空間であるから完全正則である。5. 完全正則性の定義におい

て、連続関数 $f: X^* \rightarrow [0, 1]$ の X への制限は X 上の連続関数である。6. X の閉集合 F と点 $x \notin F$ に対し、 $F \cup \{\infty\}$ は X^* の閉集合である。7. X^* の完全正則性より、 x と $F \cup \{\infty\}$ を分離する関数 $f: X^* \rightarrow [0, 1]$ が存在し、その制限により X での分離が実現される。 ■

4. 一様構造の厳密な定式化と擬距離による再構成

一様構造は、距離空間の「一様連続性」や「完備性」を抽象化した構造である。ブルバキの近縁フィルターによる定義を採用する。

定義 4.1 (一様構造) 集合 X 上の一様構造 \mathcal{U} とは、 $X \times X$ 上のフィルターであって以下の公理を満たすものをいう。

1. 任意の $V \in \mathcal{U}$ に対し、 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq V$ 。
2. $V \in \mathcal{U} \implies V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$ 。
3. 任意の $V \in \mathcal{U}$ に対し、ある $W \in \mathcal{U}$ が存在して $W \circ W \subseteq V$ 。

ここで $W \circ W = \{(x, z) \mid \exists y \in X \text{ s.t. } (x, y) \in W, (y, z) \in W\}$ である。

定理 4.2 (擬距離による一様構造の生成) X 上の擬距離の族 \mathcal{P} に対し、

$$V_{p, \epsilon} = \{(x, y) \mid p(x, y) < \epsilon\} \quad (p \in \mathcal{P}, \epsilon > 0)$$

を準基（有限交差が基底となる）とするフィルターは、一様構造を定める。

5. 微細一様構造の構成と連続関数の一様連続性

完全正則空間において、その位相と両立する最も細かい一様構造を構成する。

定義 5.1 (微細一様構造 \mathcal{U}_F) 完全正則空間 (X, τ) において、 $\tau \times \tau$ に関して連続なすべての擬距離の族 \mathcal{P}_{all} から生成される一様構造を微細一様構造と呼ぶ。

定理 5.2 (連続関数の絶対的一様連続性) 完全正則空間 (X, τ) において、任意の連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、微細一様構造 \mathcal{U}_F に関して一様連続である。

証明

f が一様連続であることを示すには、任意の $\epsilon > 0$ に対し、近縁 $V \in \mathcal{U}_F$ が存在して、
 $(x, y) \in V \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$ となることを示せばよい。1. $p_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ を定義する。2. f が連続であるため、 p_f は連続な擬距離である。3. 微細一様構造の定義により、 \mathcal{P}_{all} は p_f を含んでいる。4. よって $V = \{(x, y) \mid p_f(x, y) < \epsilon\}$ は \mathcal{U}_F の近縁である。5. この V を用いれば、
 $(x, y) \in V \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$ は定義から自明である。 ■

6. 完備性の理論：コーシーフィルターと収束の議論

点列の収束の限界を克服するため、一様空間における完備性はフィルターの言語で記述される。

定義 6.1 (コーシーフィルター) 一様空間 (X, \mathcal{U}) 上のフィルター \mathcal{F} がコーシーフィルターであるとは、任意の近縁 $V \in \mathcal{U}$ に対して、ある $F \in \mathcal{F}$ が存在して $F \times F \subseteq V$ を満たすことをいう。

定義 6.2 (完備一様空間) 一様空間 X が完備であるとは、すべてのコーシーフィルターが X のある点に収束することをいう。

7. コンパクト空間における一様構造の一意性と完備性の完全証明

コンパクト空間においては、位相構造がそのまま一様構造の性質を強く支配する。

定理 7.1 (コンパクト一様空間の完備性) 一様空間 (X, \mathcal{U}) の位相 τ がコンパクトであれば、 (X, \mathcal{U}) は完備である。

証明

\mathcal{F} を X 上のコーシーフィルターとする。1. 空間がコンパクトであるため、 X 上の任意のフィルター \mathcal{F} は少なくとも一つの集積点 x を持つ。2. 集積点の定義より、 x の任意の近傍 N に対して、任意の $F \in \mathcal{F}$ は $N \cap F \neq \emptyset$ を満たす。3. \mathcal{F} が x に収束することを示す。すなわち、任意の近縁 $V \in \mathcal{U}$ に対して $V(x) \in \mathcal{F}$ を示せばよい。4. 近縁の公理より、ある対称な近縁 $W (W = W^{-1})$ が存在して $W \circ W \subseteq V$ を満たす。5. \mathcal{F} はコーシーフィルターなので、ある $F_0 \in \mathcal{F}$ が存在して $F_0 \times F_0 \subseteq W$ となる。6. x は集積点なので、 $W(x) \cap F_0 \neq \emptyset$ 。よってある $y \in F_0$ が存在して $(x, y) \in W$ 。対称性より $(y, x) \in W$ 。7. 任意の $z \in F_0$ をとる。 $(z, y) \in F_0 \times F_0 \subseteq W$ である。8. $(z, y) \in W$ かつ $(y, x) \in W$ より、 $(z, x) \in W \circ W \subseteq V$ 。9. すなわち $z \in V(x)$ である。よって $F_0 \subseteq V(x)$ 。10. $F_0 \in \mathcal{F}$ なので、フィルターの定義より $V(x) \in \mathcal{F}$ 。ゆえに $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。 ■

定理 7.2 (一様構造の一意性) コンパクト Hausdorff 空間 X において、その位相を誘導する一様構造 \mathcal{U} は一つしか存在せず、それは Δ のすべての開近傍からなる族である。

証明

\mathcal{U} を X の位相を誘導する任意の一様構造、 \mathcal{U}_C を Δ の開近傍フィルターとする。

1. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_C$ の証明

$V \in \mathcal{U}$ とすると、ある開近縁 $V^\circ \in \mathcal{U}$ が存在して $\Delta \subseteq V^\circ \subseteq V$ となる (一様空間の基本性質)。
 V° は Δ の開近傍なので $V \in \mathcal{U}_C$ 。

2. $\mathcal{U}_C \subseteq \mathcal{U}$ の証明

W を Δ の開近傍とする。任意の $x \in X$ に対し、 $(x, x) \in W$ であり W は開集合なので、ある開近傍 N_x が存在して $N_x \times N_x \subseteq W$ となる。一様構造 \mathcal{U} が位相を誘導することから、ある対称な近縁 $V_x \in \mathcal{U}$ が存在して $V_x(x) \subseteq N_x$ 。さらに $U_x \circ U_x \subseteq V_x$ となる対称な近縁 $U_x \in \mathcal{U}$ をとる。 X のコンパクト性より、被覆 $\{U_x(x) \mid x \in X\}$ から有限部分被覆 $\{U_{x_i}(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ を選べる。
 $U = \bigcap U_{x_i} \in \mathcal{U}$ とおき、 $U \subseteq W$ を示す。任意の $(y, z) \in U$ をとる。ある i で $y \in U_{x_i}(x_i)$ 。よって $(x_i, y) \in U_{x_i}$ 。また $(y, z) \in U \subseteq U_{x_i}$ 。よって $(x_i, z) \in U_{x_i} \circ U_{x_i} \subseteq V_{x_i}$ 。したがって $y, z \in V_{x_i}(x_i) \subseteq N_{x_i}$ 。ゆえに $(y, z) \in N_{x_i} \times N_{x_i} \subseteq W$ 。これより $W \in \mathcal{U}_C$ 。

8. 距離化可能定理：可算基底から距離を構成する全行程

一様空間が「距離化可能」であるための条件は、その近縁フィルターが可算な基底を持つことである。この証明には、擬距離を段階的に合成する技術が必要である。

補題 8.1 (メトリゼーション・レンマ) 一様空間 X の基本近縁系として可算な $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で、

$$V_0 = X \times X, \quad V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n, \quad V_n = V_n^{-1}$$

を満たすものが存在すれば、 X は距離化可能である。

証明

各 V_n に対して、 $f(x, y)$ を次のように定義する。

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-n} & (x, y) \in V_{n-1} \setminus V_n \\ 0 & (x, y) \in \bigcap V_n \end{cases}$$

この f は対称であるが、三角不等式を満たさない。そこで、任意の点列による「鎖」の長さの最小値として距離 d を定義する。

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} f(z_i, z_{i+1}) \mid z_0 = x, z_k = y, z_i \in X \right\}$$

この d は三角不等式を明らかに満たす。重要なのは d が一様構造を誘導することの証明である。

主張： $\frac{1}{2}f(x, y) \leq d(x, y) \leq f(x, y)$ (この左側の不等式の証明には、鎖の長さに関する帰納法を用いる。 $V_{n+1}^3 \subseteq V_n$ という条件が、細切れの鎖を結合しても長さを一定以下に抑えることを保証する。) この不等式により、 $d(x, y) < 2^{-(n+1)}$ ならば $f(x, y) < 2^{-n}$ 、すなわち $(x, y) \in V_n$ が従い、距離が一様構造と両立することが示される。

9. ウリゾーンの距離化定理：正規性と第二可算性

の結実

最後に、位相空間論における最も有名な定理の一つを、これまでの道具（特に完全正則性と一様構造）を用いて証明する。

定理 9.1 (URYSOHN'S METRIZATION THEOREM) 第二可算な正規空間 X は距離化可能である。

証明

1. 基底の可算性: X の開基 $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとる。2. 正規性による関数の抽出: $\overline{B_n} \subseteq B_m$ となるペア (n, m) すべてに対し、ウリゾーンの補題より $f_{n,m}: X \rightarrow [0, 1]$ を $f_{n,m}(\overline{B_n}) = 0, f_{n,m}(X \setminus B_m) = 1$ となるようにとる。この関数の族 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は可算個である。3. 一様構造の構成: 各 f_k に対して、連続な擬距離 $p_k(x, y) = |f_k(x) - f_k(y)|$ を定義する。4. 基本近縁系の可算性: U を p_k の有限族から生成される一様構造とする。基本近縁系は $V(k, \epsilon) = \{(x, y) \mid \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} p_j(x, y) < \epsilon\}$ の形となり、これは可算基底を持つ。5. 位相の不変性: この一様構造が元の位相 τ を誘導することを示す。(i) p_k は連続なので、一様位相は τ より粗い。(ii) 逆に $x \in U \in \tau$ に対し、第二可算性と正規性よりある k が存在して $x \in \overline{B_n} \subseteq B_m \subseteq U$ 。このとき f_k が x と $X \setminus U$ を分離するので、 x の一様近傍はある ϵ で U に含まれる。6. 距離化可能補題の適用: 一様構造が可算基底を持ち、 T_0 (X が Hausdorff なので $\cap V_n = \Delta$) であれば、補題 8.1 により距離化可能である。 ■

総括

本稿では、正規空間という静的な位相的性質が、ウリゾーンの補題という動的な連続関数の存在へと結びつき、それが一様構造という広域的な構造を介して、最終的に距離という定量的な尺度へと昇華される過程を記述した。数学の美しさは、これら一見異なる概念が「第二可算性」や「コンパクト性」という補助線一本で、完璧な一貫性を持って統合される点にある。